



**TUGAS AKHIR - SM141501**

# **ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR PREY LESLIE-GOWER DENGAN FUNGSI RESPON SOKOL-HOWELL**

**MUCHAMAD ROMDONI ALYDRUS**  
**NRP 1210 100 060**

**Dosen Pembimbing**  
**Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.**

**JURUSAN MATEMATIKA**  
**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**  
**Institut Teknologi Sepuluh Nopember**  
**Surabaya 2015**



**TUGAS AKHIR - SM 141501**

**DYNAMIC ANALYSIS OF LESLIE-GOWER  
PREDATOR PREY MODEL WITH SOKOL-  
HOWELL FUNCTIONAL RESPONSE**

**MUCHAMAD ROMDONI ALYDRUS**  
**NRP 1210 100 060**

**Dosen Pembimbing**  
**Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si.**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**  
**Faculty of Mathematics and Natural Sciences**  
**Sepuluh Nopember Institute of Technology**  
**Surabaya 2015**

## LEMBAR PENGESAHAN

### ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR PREY LESLIE-GOWER DENGAN FUNGSI RESPON SOKOL-HOWELL

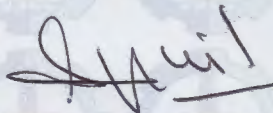
### *DYNAMIC ANALYSIS OF LESLIE-GOWER PREDATOR PREY MODEL WITH SOKOL-HOWELL FUNCTIONAL RESPONSE*

#### TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :  
MUCHAMAD ROMDONI ALYDRUS  
NRP. 1210 100 060

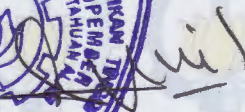
Menyetujui,  
Pembimbing



Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
NIP. 19660414 199102 2 001



Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS



Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
NIP. 19660414 199102 2 001

Surabaya, Juli 2015

# ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR-PREY LESLIE-GOWER DENGAN FUNGSI RESPON SOKOL-HOWELL

Nama Mahasiswa : Muchamad Romdoni Alydrus  
NRP : 1210100060  
Jurusan : Matematika  
Dosen Pembimbing : Prof. Dr. Erna Apriliani, M. Si.

## **Abstrak**

*Model predator-prey adalah model interaksi antara mangsa dan pemangsa yang dapat mengganggu keseimbangan ekosistem jika terjadi ketidakseimbangan jumlah populasi. Model ini telah dikembangkan dan dimodifikasi oleh para peneliti. Salah satu yang mengembangkan dan memodifikasi adalah Leslie dan Gower yang membuat model predator-prey untuk tiga spesies dengan fungsi respon Sokol-Howell, dimana Sokol-Howell sendiri memodifikasi fungsi respon Holling tipe IV. Dalam tugas akhir ini, dibahas analisis dinamik dari model tersebut dengan menganalisis titik-titik kesetimbangan yang ada. Kemudian mencari matriks Jacobian dari sistem dan dari matriks Jacobian tersebut didapatkan nilai  $\lambda$  yang menyatakan nilai karakteristik dari titik kesetimbangan, sehingga dapat ditentukan kestabilan dari sistem tersebut. Serta dilakukan pula analisis keberadaan bifurkasi dengan melihat nilai eigen dari titik kesetimbangan. Simulasi dilakukan dengan menggunakan software Matlab. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan mengubah nilai  $a_0$  dan  $c_3$  kestabilan sistem berubah dari tidak stabil menjadi stabil.*

**Kata kunci:** Model Predator-Prey Leslie-Gower, Analisis Dinamik, Titik Kesetimbangan.





*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

# ***DYNAMIC ANALYSIS OF LESLIE-GOWER PREDATOR PREY MODEL WITH SOKOL-HOWELL FUNCTIONAL RESPONSE***

*Name of Student : Muchamad Romdoni Alydrus*  
*NRP : 1210100060*  
*Department : Matematika*  
*Supervisor : Prof. Dr. Erna Apriliani, M. Si.*

## ***Abstract***

*Predator prey model is the model of interaction between prey and predator that can disrupt the balance of ecosystem if imbalance number of population. This model has been developed and modified by researches. One of researches who developed and modified is Leslie and Gower makes predator prey model of three species with functional response Sokol and Howell, where Sokol and Howell modify Holling response function of type IV. In this final project, discussed about the dynamic analysis of the model by analyzing equilibrium point. Then look for the Jacobian matrix of the system and of Jacobian matrix obtained values  $\lambda$  which states the characteristic value of the equilibrium point, so it can be determined the stability of the system. Also done an analysis of the existence of bifurcation by looking at the eigenvalues of the equilibrium point. Simulations performed using Matlab software. From the simulation results shows that by changing the parameter values of  $a_0$  and  $c_3$ , the stability of system change from unstable become stable.*

***Keywords:*** *Leslie-Gower Predator Prey Model, Dynamic Analysis, Equilibrium Point.*



*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'alamin, segala puji hanya milik Allah yang memiliki apa yang ada di langit dan di bumi. Dialah yang mempunyai segala ilmu dan karena limpahan kasih sayang, karunia, dan petunjuk serta bimbingan-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan baik yang berjudul :

### **“Analisis Dinamik Model Predator Prey Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Sokol-Howell”**

sebagai salah satu syarat kelulusan menempuh program S1 Matematika FMIPA ITS. Dalam penulisan Tugas Akhir ini tidak akan terselesaikan dengan baik tanpa adanya bimbingan dan bantuan dari berbagai pihak. Suatu kebahagiaan dan kewajiban bagi penulis untuk menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan mendukung atas terselesainya Tugas Akhir :

1. Kedua orang tua, kakak, serta keluarga dekat yang selalu mendoakan dan memberikan motivasi.
2. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si, selaku dosen pembimbing Tugas Akhir yang telah banyak mengarahkan dan memberikan masukan serta motivasi sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan.
3. Ibu Dr. Dra. Mardlijah M.T, bapak Dr. Hariyanto, M.Si dan bapak Kistosil Fahim, S.Si. M.Si selaku dosen penguji Tugas Akhir, atas semua saran dan masukan yang diberikan kepada penulis.
4. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si, selaku ketua jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya.



5. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si. selaku dosen wali yang memberikan arahan dan masukan kepada penulis
6. Bapak Ibu dosen, seluruh staf Tata Usaha (Pak Toat dan kawan-kawan), asisten laboratorium (Pak Muhtadi, Mbak Yunita, Pak Joko, Mas Ali).
7. Seluruh pihak yang terkait yang tidak dapat disebutkansatu per satu yang secara tidak langsung telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

Penulis menyadari sepenuhnya dalam penulisan ini masih banyak kekurangan, kesalahan dan masih jauh dari sempurna, sehingga segala saran dan kritik yang sifatnya membangun sangat diharapkan oleh penulis. Akhirnya penulis berharap semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat khususnya bagi penulis dan pembaca pada umumnya.

Wassalamualaikum Wr. Wb.

Surabaya, Agustus 2015

Penulis

## Special Thank's To

Selama proses pembuatan Tugas Akhir ini, banyak pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan untuk penulis. Penulis sungguh ingin mengucapkan terima kasih dan apresiasi secara khusus kepada:

1. Bapak, Ibu dan saudara yang senantiasa dengan ikhlas memberikan semangat, doa, dan nasihat-nasihat yang sungguh berarti bagi penulis.
2. Teman-teman satu angkatan 2010 (arITSmatics) dan HIMATIKA ITS yang memberikan dukungan, tempaan, binaan dan terima kasih atas wadah aspirasi yang sudah diberikan.

Tentu saja masih banyak pihak lain yang turut andil dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Semoga Allah membalas dengan balasan yang lebih baik bagi semua pihak yang telah membantu penulis. *Amin Ya Rabbal 'Alamin.*



*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN.....	v
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	ix
KATA PENGANTAR.....	xi
DAFTAR ISI.....	xv
DAFTAR GAMBAR .....	xix
DAFTAR TABEL.....	xxi
DAFTAR SIMBOL.....	xxiii
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan .....	3
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Model Holling Predator Prey .....	5
2.2 Model Predator Prey leslie-Gower.....	6
2.3 Kestabilan Titik Tetap .....	7
2.4 Stabil Asimtotik Lokal.....	7
2.4.1 Akar-akar Karakteristik.....	8



2.4.2 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz.....	9
2.5 Bifurkasi.....	11
2.6 Runge Kutta Orde 6 .....	12
<b>BAB III. METODE PENELITIAN</b>	
3.1 Studi Literatur .....	15
3.2 Menganalisis Model Matematika .....	15
3.3 Menganalisis Kestabilan dan Bifurkasi pada Titik Keseimbangan .....	15
3.4 Simulasi dan Analisis Hasil .....	15
3.5 Penulisan Laporan Tugas Akhir.....	16
<b>BAB IV. ANALISIS DAN PEMBAHASAN</b>	
4.1 Model Prey Predator Leslie-Gower dengan Fungsi respon Sokol-Howell .....	17
4.2 Titik Keseimbangan Model Prey Predator leslie- Gower.....	19
4.3 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan.....	25
4.3.1 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan $E_0$	27
4.3.2 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan $E_1$	28
4.3.3 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan $E_2$	29
4.3.4 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan $E_3$	32
4.4 Analisis Bifurkasi.....	39
4.5 Simulasi Numerik .....	40
<b>BAB V. KESIMPULAN DAN SARAN</b>	
5.1 Kesimpulan .....	49

5.2 Saran .....	49
DAFTAR PUSTAKA.....	51
LAMPIRAN.....	53



*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 4.1	Hubungan Makanan dalam Rantai Makanan tiga Spesies ..... 17
Gambar 4.2.a	Potret fase 3D dari sistem 1..... 41
Gambar 4.2.b	Grafik sistem 1 terhadap waktu..... 42
Gambar 4.3	Potret fase pada titik kesetimbangan $E_0$ ..... 43
Gambar 4.4	Potret fase pada titik kesetimbangan $E_1$ ..... 44
Gambar 4.5	Potret fase dengan $c_3 = 0.05$ ..... 45
Gambar 4.6	Potret fase dengan $c_3 = 0.043$ ..... 46
Gambar 4.7	Potret fase dengan $a_0 = 0.1$ ..... 47
Gambar 4.8	Potret fase dengan $a_0 = 0.2$ ..... 48





*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1	Tabel koefisien persamaan karakteristik ..
Tabel 2.2	Routh-Hurwitz .....
Tabel 4.1	Routh-Hurwitz titik kesetimbangan $E_3$ .....
Tabel 4.2	Parameter dan nilai .....



*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## DAFTAR SIMBOL

- $N$  = populasi *prey* yaitu kelompok individu yang menjadi mangsa dari  $P$
- $P$  = populasi *predator* yaitu kelompok individu yang menjadi pemangsa  $N$  dan mangsa dari  $Z$
- $Z$  = populasi *toppredator* yaitu kelompok individu yang menjadi pemangsa  $P$
- $a_0$  = rata-rata pertumbuhan dari  $N$
- $b_0$  = koefisien kompetisi antar spesies  $N$
- $v_0$  = koefisien pemangsaan *predator* terhadap *prey*
- $v_1$  = koefisien pemangsaan *predator* terhadap *prey*
- $v_2$  = koefisien pemangsaan *toppredator* terhadap *predator*
- $v_3$  = koefisien kompetisi antar spesies  $Z$
- $D_0$  = ukuran sejauh mana lingkungan memberikan perlindungan terhadap mangsa  $N$
- $D_1$  = ukuran sejauh mana lingkungan memberikan perlindungan terhadap mangsa  $N$
- $a_1$  = rata-rata kematian  $P$  dari ketiadaan  $N$
- $D_2$  = nilai dari  $P$  pada saat perkapita berubah rata-rata dari  $P$  ke  $\frac{v_2}{2}$
- $c_3$  = rata-rata pertumbuhan  $Z$  dari reproduksi
- $D_3$  = berkurangnya populasi  $Z$  selama kelangkaan  $P$
- $J$  = matriks Jacobian
- $\lambda$  = nilai eigen





*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada tugas akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan dari tugas akhir ini.

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Salah satu model interaksi makhluk hidup dalam satu ekosistem adalah model *predator-prey*. *Prey* merupakan organisme yang dimakan dan biasa disebut mangsa. Sedangkan *predator* adalah organisme yang memakan dan biasa disebut pemangsa. Model *predator-prey* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini disebut juga model Lotka-Volterra [1]. Hubungan antara *prey* dan *predator* ini sangat menarik untuk dipelajari. Misalkan jumlah populasi *predator* yang banyak dengan tingkat predasi *predator* yang tinggi dapat mengakibatkan jumlah populasi *prey* berkurang. Jika nantinya ini dibiarkan dikhawatirkan akan menimbulkan kelangkaan dan mengakibatkan keseimbangan ekosistem terganggu. Oleh karena itu, diperlukan suatu analisis dinamik mengenai hubungan *predator-prey*.

Hubungan dinamik *predator* dan *prey* menjadi salah satu topik yang sering dibahas di kalangan peneliti. Seperti halnya mengenai Kendali Optimal pada Sistem *Prey-Predator* dengan Pemberian Makan Alternatif pada Predator[2]. Penelitian tersebut bekerja pada model *predator-prey* dua spesies. Namun pada kenyataannya, interaksi antara *predator* dan *prey* tidak terjadi antara dua spesies saja, misal ada omnivora sebagai spesies ketiga yang memangsa *prey* dan bangkai *predator*, sehingga menyebabkan populasi *prey* semakin berkurang. Seperti pada penelitian sebelumnya yang membahas mengenai analisis dinamik model *predator-prey* tiga spesies[1]. Penelitian tersebut menggunakan model *predator-prey* dengan tambahan adanya

omnivora yang memangsa *predator* dan *prey*. Model *predator-prey* yang digunakan menggunakan fungsi respon Holling tipe III.

Dalam perkembangannya, model *predator-prey* tiga spesies dapat dibentuk dengan fungsi respon Holling tipe IV[3]. Pada tugas akhir ini akan dibahas model *predator-prey* tiga spesies yang terdiri dari *prey*, *predator*, dan *top predator*. *Prey* adalah spesies yang hanya dimangsa oleh *predator*. *Predator* adalah spesies yang memangsa *prey* dan hanya dimangsa oleh *top predator*. Dan *top predator* adalah spesies yang hanya memangsa *predator*.

Model matematika yang terbentuk terdiri dari tiga persamaan, yaitu laju pertumbuhan *prey*, laju pertumbuhan *predator*, dan laju pertumbuhan *top predator*. Ketiga persamaan tersebut membentuk system persamaan differensial nonlinear. Dari model tersebut dilakukan analisis dinamik dengan menentukan titik kesetimbangan model dan menganalisis jenis kestabilan titik kesetimbangan model serta menentukan keberadaan bifurkasi. Simulasi numerik diberikan untuk menunjang hasil analisis kestabilan yang di peroleh dengan menggunakan *software* Matlab.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas akhir ini, yaitu:

1. Bagaimana kestabilan model *predator-prey* Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokoll-Howel?
2. Apakah terjadi bifurkasi?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam tugas akhir ini, yaitu:

1. Model *predator-prey* yang digunakan adalah model Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell.
2. *Predator* hanya memangsa *prey*, sedangkan *toppredator* hanya memangsa *predator*.



#### 1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam tugas akhir ini yaitu:

1. Mendapatkan kestabilan model *predator-prey* Leslie Gower
2. Menentukan apakah terjadi bifurkasi.

#### 1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari tugas akhir ini yaitu:

1. Mengetahui perilaku dinamik dari model *predator-prey* Leslie-Gower
2. Memberi informasi bahwa penyelesaian bentuk kestabilan yang diberikan dapat direalisasikan untuk menjaga keseimbangan ekosistem

#### 1.6 Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini secara keseluruhan terdiri dari lima bab dan lampiran. Secara garis besar masing-masing bab akan membahas hal-hal sebagai berikut:

##### BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang permasalahan, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penulisan serta sistematika penulisan.

##### BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini memaparkan dasar teori yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir.

##### BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan alur kerja dan metode yang digunakan penulis dalam mengerjakan tugas akhir.

##### BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini menyajikan analisis kestabilan lokal dan bifurkasi dari model *predator-prey* Leslie-Gower beserta simulasi numeriknya.

##### BAB V PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran mengenai analisis kestabilan lokal dari model *predator-prey* Leslie-Gower.

##### LAMPIRAN



*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Dalam tugas akhir ini diperlukan tinjauan pustaka yang dapat menunjang metode yang digunakan dalam pembahasan tugas akhir ini.

### 2.1 Model Holling *Predator-Prey*

Secara umum, model *predator-prey* dapat ditulis sebagai berikut[4]:

$$\frac{dN}{dt} = Nf(N) - Pg(N, P)$$

$$\frac{dP}{dt} = P[g(N, P) - d]$$

Dimana  $N$  dan  $P$  adalah jumlah *prey* dan *predator*,  $f(N)$  adalah rata-rata per kapita kenaikan *prey* dari ketiadaan *predator*,  $d$  adalah kematian rata-rata predator dalam ketiadaan *prey*, dan  $g(N, P)$  adalah fungsi respon.

Model Holling adalah hubungan (fungsi respon) antara pemangsa dan mangsanya. Ada beberapa model Holling[4], yaitu:

a. Holling tipe I

Fungsi respon Holling tipe I biasa disebut “*prey dependent*” karena bergantung pada *prey*. Dengan

$$g(N, P) = mN + b$$

b. Holling tipe II

$$g(N, P) = \frac{mN}{1 + bN}$$

c. Holling tipe III

$$g(N, P) = \frac{mN^2}{1 + aN^2}$$

d. Holling tipe IV

$$g(N, P) = \frac{mN}{1 + bN + aN^2}$$

Fungsi diatas disebut juga fungsi respon Monod-Haldane. Sokol-Howell menambahkan jika  $b = 0$ , maka fungsi diatas menjadi

$$g(N, P) = \frac{mN}{1 + aN^2}$$

Dan fungsi respon diatas disebut juga Holling tipe IV.

## 2.2 Model *Predator-Prey Leslie Gower*

Pada model ini kepadatan populasi *prey* pada waktu  $t$  dinotasikan dengan  $N(t)$ , kepadatan populasi *predator* dinotasikan dengan  $P(t)$  dan kepadatan populasi *top predator* dinotasikan dengan  $Z(t)$ . *Predator P* memangsa satu-satunya makanan  $N$  menurut fungsi respon Sokol-Howell sementara *top predator Z* memangsa  $P$  berdasarkan modifikasi tipe Leslie-Gower.

Dengan demikian, model *predator-prey* Leslie-Gower dapat dinyatakan[3]:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= a_0N - b_0N^2 - \frac{v_0NP}{D_0 + N^2} \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{v_1NP}{D_1 + N^2} - a_1P - \frac{v_2PZ}{D_2 + P} \\ \frac{dZ}{dt} &= c_3Z^2 - \frac{v_3Z^2}{D_3 + P} \\ N(0) &\geq 0, P(0) \geq 0, \text{ dan } Z(0) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dengan:

$a_0$ : rata-rata pertumbuhan dari  $N$

$b_0$ : koefisien kompetisi antar spesies  $N$

$v_0$  dan  $v_1$ : Koefisien pemangsaan predator terhadap prey



$v_2$ : koefisien pemangsaan top predator terhadap predator

$v_3$ : koefisien kompetisi antar spesies Z

$D_0$  dan  $D_1$ : ukuran sejauh mana lingkungan memberikan perlindungan terhadap mangsa N

$a_1$ : rata-rata kematian P dari ketiadaan N

$D_2$ : nilai dari P pada saat per kapita berubah rata-rata dari P ke  $\frac{v_2}{2}$

$c_3$ : rata-rata pertumbuhan Z dari reproduksi

$D_3$ : berkurangnya populasi Z selama kelangkaan P

Dalam tugas akhir ini akan dikaji perilaku dinamik dari model (2.1).

### 2.3 Kestabilan Titik Tetap

Pandang persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\quad (2.2)$$

Sebuah titik  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  merupakan titik kesetimbangan dari persamaan diatas jika memenuhi  $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$  dan  $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ . Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan[5].

$$x(t) \equiv \bar{x}_0 \text{ dan } y(t) \equiv \bar{y}_0$$

adalah penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.2) untuk semua  $t$ .

### 2.4 Stabil Asimtotik Lokal

Kestabilan asimtotik lokal pada titik keseimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem yang dihitung dari titik kesetimbangan[5].

**Teorema 2.1 :**

*Titik setimbang  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari*

$$\text{matriks } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

*mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.*

**2.4.1 Akar-akar Karakteristik**

Dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan didapatkan akar-akar karakteristik sistem [5].

**Definisi 2.1**

*Jika  $J$  adalah matriks yang berukuran  $n \times n$  maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari  $J$  jika memenuhi :*

$$Jx = \lambda x \quad (2.3)$$

*untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut nilai karakteristik dari  $J$  dan  $x$  dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan  $\lambda$ . Untuk mencari nilai karakteristik matrik  $J$  yang berukuran  $n \times n$ , maka persamaan (2.3) dapat ditulis:*

$$(J - \lambda I)x = 0 \quad (2.4)$$

*mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika*

$$|J - \lambda I| = 0 \quad (2.5)$$

*Jika matriks  $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dan  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  maka persamaan (2.5) dapat ditulis*

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

*atau*

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$$

### Akar-akar karakteristik

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Sifat stabilitas titik setimbang berdasarkan tanda bagian real dibagi menjadi 3 yaitu[5]:

1. Stabil

Titik setimbang dikatakan stabil jika dan hanya jika akar karakteristik mempunyai bagian real tak positif.

2. Stabil asimtotis

Titik setimbang dikatakan stabil asimtotis jika dan hanya jika akar karakteristik mempunyai bagian real negatif .

3. Tidak stabil

Titik setimbang dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat sedikitnya satu akar karakteristik yang mempunyai bagian positif.

#### ***Teorema 2.2:***

*Titik setimbang  $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$  stabil asimtotis jika dan hanya jika akar karakteristik matriks  $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  mempunyai bagian real negatif dan tidak stabil jika sedikitnya satu akar karakteristik mempunyai bagian real positif.*

### **2.4.2 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz**

Kriteria kestabilan Routh – Hurwitz adalah suatu metode untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar karakteristik secara langsung[6].

Jika diketahui suatu persamaan karakteristik dengan orde ke-n sebagai berikut :

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0$$



Kemudian susun koefisien persamaan karakteristik menjadi:

**Tabel 2.1.** Tabel Koefisien Persamaan Karakteristik

$\lambda^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	.....	$a_{2n-2}, n = 1, 2, \dots, k$
$\lambda^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	.....	$a_{2n-1}, n = 1, 2, \dots, k$
$\lambda^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	.....	$b_n$
.....	$c_1$	$c_2$	$c_3$	.....	$c_n$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

dengan

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1},$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1},$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1}$$

Tabel 2.1 tersebut dilanjutkan mendatar dan menurun hingga diperoleh nilai nol. Semua akar tersebut dilanjutkan bernilai negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-elemen dari kolom pertama pada Tabel 2.1 mempunyai tanda yang sama. Selanjutnya ambil persamaan karakteristik orde ke-3 berikut :

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (2.6)$$

Sehingga akan diperoleh tabel Routh Hurwitz sebagai berikut :

**Tabel 2.2** Routh-Hurwitz

$\lambda^3$	1	$a_2$	0	0
$\lambda^2$	$a_1$	$a_3$	0	0
$\lambda^1$	$(a_1 a_2 - a_3) / a_1$	0	0	0
$\lambda^0$	$a_3(a_1 a_2 - a_3) / (a_1 a_2 - a_3)$	0	0	0
$\lambda^{-1}$	0			

Supaya akar-akar karakteristik bernilai negatif pada bagian realnya maka kolom pertama pada Tabel 2.2 harus mempunyai tanda yang sama yaitu :

1.  $a_1 > 0$
2.  $\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1} > 0 \rightarrow a_1 a_2 - a_3 > 0$   
 $a_1 a_2 > a_3$  supaya memenuhi maka nilai  $a_2 > 0$
3.  $\frac{a_3(a_1 a_2 - a_3)}{a_1 a_2 - a_3} > 0 \rightarrow a_3 > 0$

Jadi perhitungan di atas dapat diperoleh bahwa untuk persamaan (2.3) akan diperoleh akar-akar karakteristik yang bernilai negatif pada bagian realnya jika memenuhi

$$a_1 > 0 ; a_2 > 0 ; a_3 > 0 ; a_1 a_2 > a_3$$

## 2.5 Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan keadaan dinamik suatu sistem akibat perubahan dari parameter. Perubahan kecil parameter dari sistem bisa menjadikan sistem yang awalnya stabil menjadi tidak stabil[7]. Ada beberapa jenis bifurkasi, yaitu:

1. Bifurkasi *saddle node*

Bentuk normal bifurkasi ini adalah

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2, x \in \mathbb{R}^1 \quad \mu \in \mathbb{R}^1$$

2. Bifurkasi *transcritical*

Bentuk normal bifurkasi ini adalah

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^2, x \in \mathbb{R}^1 \quad \mu \in \mathbb{R}^1$$

### 3. Bifurkasi *Pitchfork*

Bentuk normal bifurkasi ini adalah

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^3, \quad x \in \mathbb{R}^1 \quad \mu \in \mathbb{R}^1$$

### 4. Bifurkasi Hopf

#### **Definisi 2.2**

Bifurkasi yang sesuai dengan keberadaan  $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$ ,  $\omega > 0$ , dengan  $\omega$  adalah bagian imajiner dari nilai eigen yang terkait. Maka bifurkasi yang terjadi disebut bifurkasi Hopf (atau Andronov Hopf).

Selanjutnya dalam konsep bifurkasi dikenal suatu titik yang disebut titik bifurkasi. Secara umum sistem dinamik dapat ditulis sebagai berikut[8]:

$$\dot{\mathbf{v}} = F(\mathbf{v}, \mu)$$

Dimana

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(N, P, Z) \text{ dan } \mu = \mu(a_0, b_0, v_0, \dots)$$

Jika sebuah pasangan  $(v_0, \mu_0)$  memenuhi kriteria sebagai berikut:

1.  $F(\mathbf{v}_0, \mu_0) = 0$
2.  $J(\mathbf{v}, \mu)$  memiliki 2 nilai eigen kompleks  
 $\lambda_{1,2} = a(\mathbf{v}, \mu) \pm ib(\mathbf{v}, \mu)$   
 di sekitar  $(\mathbf{v}_0, \mu_0)$
3.  $a(\mathbf{v}, \mu) = 0$  dan  $b(\mathbf{v}, \mu) \neq 0$
4. Nilai eigen ketiga  $\lambda_3 \neq 0$

Maka titik  $(\mathbf{v}_0, \mu_0)$  disebut titik bifurkasi Hopf.

## 2.6 Runge-Kutta Orde 6

Runge-Kutta yang digunakan adalah Runge-Kutta orde 6 atau *Runge-Kutta-Fehlberg Method*[9]. Pada metode ini nilai  $k$  digunakan untuk perhitungan  $y$  selanjutnya. Secara umum algoritma Runge-Kutta orde 6 dapat ditulis sebagai berikut:



$$y_{n+1} = y_n + \left( \frac{16k_1}{135} + \frac{6656k_3}{12825} + \frac{28561k_4}{56430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55} \right)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{k_1}{4}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{1932k_1}{2197} - \frac{7200k_2}{2197} + \frac{7296k_3}{2197}\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4104}\right)$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n - \frac{8k_1}{27} + 2k_2 - \frac{3544k_3}{2565} + \frac{1859k_4}{4104} - \frac{11k_5}{40}\right)$$

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

### **BAB III METODOLOGI PENELITIAN**

Metodologi penelitian digunakan sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan secara sistematis. Pada bab ini akan diuraikan metode yang digunakan dalam penelitian ini secara rinci, antara lain :

#### **3.1 Studi Literatur**

Pada tahap ini akan dilakukan identifikasi permasalahan dan pemahaman teori dengan mencari referensi yang menunjang penelitian antara lain mengenai pengertian model *predator-prey* Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell. Hal ini diperoleh dari berbagai sumber pustaka, antara lain buku teks, artikel, internet, maupun jurnal.

#### **3.2 Menganalisis Model Matematika**

Pada tahap ini, akan dikaji setiap suku pada model *predator-prey* Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell beserta parameter yang ada.

#### **3.3 Menganalisis Kestabilan dan Bifurkasi pada Titik Keseimbangan**

Dari model matematika yang diberikan, akan dicari titik keseimbangan dari model tersebut, pelinieran atau pembentukan matriks Jacobian sistem dan menentukan nilai eigen sehingga dapat diketahui apakah titik setimbang tersebut stabil atau tidak. Serta di tentukan pula titik bifurkasi dimana nilai eigen berubah dari negatif ke positif

#### **3.5 Simulasi dan Analisis Hasil**

Pada tahap ini dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *software* Matlab. Kemudian dilakukan analisis terhadap hasil simulasi tersebut.



### **3.6 Penulisan laporan Tugas Akhir**

Tahap akhir dalam penelitian ini adalah penulisan laporan Tugas Akhir dan penarikan kesimpulan terhadap pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya serta pemberian saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

## BAB IV

### ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai titik kesetimbangan dari system *prey-predator* Leslie-Gower. Akan ditentukan pula kestabilan dari setiap titik kesetimbangan. Kemudian akan dilakukan analisa numerik dan bifurkasi dengan simulasi menggunakan *software* Matlab.

#### 4.1 Model *Prey-Predator* Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Sokol-Howell

Model *prey-predator* tiga spesies pada model (2.1) terdiri dari *prey*  $N$  yang merupakan makanan untuk *predator*  $P$ . Kemudian *predator*  $P$  yang merupakan makanan untuk *top predator*  $Z$ , dan juga *top predator*  $Z$  yang hubungannya bisa dilihat pada gambar 4.1.

Spesies  $N$



Spesies  $P$



Spesies  $Z$

**Gambar 4.1.** Hubungan makanan dalam rantai makanan 3 spesies

Secara umum model *prey-predator* 3 spesies Leslie-Gower adalah:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= a_0N - b_0N^2 - \frac{v_0NP}{D_0 + N^2} \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{v_1NP}{D_1 + N^2} - a_1P - \frac{v_2PZ}{D_2 + P} \\ \frac{dZ}{dt} &= c_3Z^2 - \frac{v_3Z^2}{D_3 + P}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Persamaan laju toppredator atau  $\frac{dZ}{dt}$  merupakan hasil modifikasi Leslie-Gower. Persamaan awalnya adalah

$$\frac{dZ}{dt} = c_3Z \left(1 - \frac{Z}{K}\right)$$

Dimana menurut Leslie-Gower  $K = S_1P$ , sehingga menjadi

$$\frac{dZ}{dT} = c_3Z \left(1 - \frac{Z}{S_1P}\right)$$

$c_3$  adalah rata-rata pertumbuhan toppredator dan  $S_1$  adalah faktor konversi mangsa menjadi toppredator. Selanjutnya ditambahkan konstanta tambahan  $S_2$  untuk menormalkan pengurangan top predator  $Z$  akibat dari kelangkaan parah makanan  $P$

$$\frac{dZ}{dt} = c_3Z \left(1 - \frac{Z}{S_2 + S_1P}\right)$$

$$\frac{dZ}{dt} = c_3Z - \frac{c_3}{S_1}Z \left(\frac{Z}{\frac{S_2}{S_1} + P}\right) = c_3Z - \frac{v_3Z^2}{D_3 + P}$$



Akhirnya, karena diasumsikan jumlah *top predator*  $Z$  betina sebanding dengan *top predator*  $Z$  jantan, maka persamaan diatas menjadi

$$\frac{dZ}{dt} = c_3 Z^2 - \frac{v_3 Z^2}{D_3 + P}$$

Keterangan:

$a_0$ : rata-rata pertumbuhan dari  $N$

$b_0$ : koefisien kompetisi antar spesies  $N$

$v_0$  dan  $v_1$ : Koefisien pemangsaan *predator* terhadap *prey*

$v_2$ : koefisien pemangsaan *toppredator* terhadap *predator*

$v_3$ : koefisien kompetisi antar spesies  $Z$

$D_0$  dan  $D_1$ : ukuran sejauh mana lingkungan memberikan perlindungan terhadap mangsa  $N$

$a_1$ : rata-rata kematian  $P$  dari ketiadaan  $N$

$D_2$ : nilai dari  $P$  pada saat per kapita berubah rata-rata dari  $P$

ke  $\frac{v_2}{2}$

$c_3$ : rata-rata pertumbuhan  $Z$  dari reproduksi

$D_3$ : berkurangnya populasi  $Z$  selama kelangkaan  $P$

#### 4.2 Titik Keseimbangan Model *Prey-Predator* Leslie-Gower

Titik kesetimbangan model *prey-predator* adalah titik yang diperoleh ketika model atau sistem (3.1) berada pada keadaan setimbang, keadaan dimana perubahan banyaknya individu dari setiap populasi  $N$ ,  $P$ , dan  $Z$  sepanjang waktu adalah nol. Sehingga dapat dituliskan bahwa  $\frac{dN}{dt} = 0, \frac{dP}{dt} = 0, \frac{dZ}{dt} = 0$ .

Dengan mensubstitusikan persamaan diatas pada model (3.1), maka diperoleh hasil sebagai berikut:

Berdasarkan laju populasi *prey*, maka

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

$$a_0N - b_0N^2 - \frac{v_0NP}{D_0 + N^2} = 0$$

$$N \left[ a_0 - b_0N - \frac{v_0P}{D_0 + N^2} \right] = 0$$

jadi, diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{N} = 0 \quad \text{atau} \quad a_0 - b_0N - \frac{v_0P}{D_0 + N^2} &= 0 \\ (a_0 - b_0N)(D_0 + N^2) - v_0P &= 0 \\ \bar{P} &= \frac{(a_0 - b_0N)(D_0 + N^2)}{v_0} \end{aligned} \quad (3.2)$$

- Untuk  $N = 0$ , disubstitusikan kedalam laju populasi *predator*, menjadi

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

$$\frac{v_1NP}{D_1 + N^2} - a_1P - \frac{v_2PZ}{D_2 + P} = 0$$

$$-a_1P - \frac{v_2PZ}{D_2 + P} = 0$$

$$P \left( -a_1 - \frac{v_2Z}{D_2 + P} \right) = 0$$

Jadi, diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{P} = 0 \quad \text{atau} \quad -a_1 - \frac{v_2Z}{D_2 + P} &= 0 \\ -a_1(D_2 + P) - v_2Z &= 0 \\ \bar{Z} &= -\frac{a_1(D_2 + P)}{v_2} \end{aligned}$$

kondisi yang kedua tidak memenuhi karena  $Z$  bernilai negatif, sehingga hanya  $P = 0$  yang memenuhi.

- Untuk  $\bar{N} = 0$  dan  $\bar{P} = 0$ , maka untuk laju populasi *top predator* menjadi

$$\frac{dZ}{dt} = 0$$

$$c_3 Z^2 - \frac{v_3 Z^2}{D_3 + P} = 0$$

$$Z^2 \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3} \right) = 0$$

$$\bar{Z} = 0$$

Jadi, diperoleh titik kesetimbangan pada saat  $\bar{N} = 0, \bar{P} = 0, \bar{Z} = 0$  atau  $E_0 = (0,0,0)$ .

- Untuk  $N \neq 0$  disubstitusikan kedalam laju populasi *predator*, sehingga menjadi

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

$$\frac{v_1 NP}{D_1 + N^2} - a_1 P - \frac{v_2 PZ}{D_2 + P} = 0$$

$$P \left( \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_2 Z}{D_2 + P} \right) = 0.$$

Jadi, diperoleh  $P = 0$  atau  $\left( \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_2 Z}{D_2 + P} \right) = 0$

- a. Untuk  $P = 0$ , berdasarkan persamaan 3.2 maka

$$\frac{(a_0 - b_0 N)(D_0 + N^2)}{v_0} = 0, \text{ sehingga didapatkan}$$

$$(a_0 - b_0 N) = 0 \rightarrow N = \frac{a_0}{b_0} \text{ atau}$$

$$(D_0 + N^2) = 0 \rightarrow N^2 = -D_0 \rightarrow N = i\sqrt{D_0}$$

kondisi kedua tidak memenuhi karena  $N$  bernilai imajiner. Karena untuk  $P = 0$  didapatkan  $Z = 0$ ,



sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_1 = (\bar{N}, 0, 0)$  dengan  $\bar{N} = \frac{a_0}{b_0}$ .

b. Untuk  $\left( \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_2 Z}{D_2 + P} \right) = 0$ , menjadi

$$v_1 N(D_2 + P) - a_1(D_1 + N^2)(D_2 + P) - v_2 Z(D_1 + N^2) = 0$$

$$\bar{Z} = \frac{(D_2 + P)(v_1 N - a_1(D_1 + N^2))}{v_2(D_1 + N^2)} \quad (3.3)$$

- Untuk  $N \neq 0$  dan  $P \neq 0$ , maka untuk laju populasi *top predator* menjadi

$$\frac{dZ}{dt} = 0$$

$$c_3 Z^2 - \frac{v_3 Z^2}{D_3 + P} = 0$$

$$Z^2 \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right) = 0.$$

Jadi, diperoleh  $\bar{Z} = 0$  atau  $c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} = 0$

- a. Untuk  $Z = 0$ , berdasarkan persamaan 3.3, maka didapatkan

$$0 = \frac{(D_2 + P)(v_1 N - a_1(D_1 + N^2))}{v_2(D_1 + N^2)}$$

$$(D_2 + P)(v_1 N - a_1(D_1 + N^2)) = 0, \text{ sehingga didapat}$$

$$(D_2 + P) = 0 \rightarrow P = -D_2 \text{ atau}$$

$$(v_1 N - a_1(D_1 + N^2)) = 0$$

$$a_1 N^2 - v_1 N + a_1 D_1 = 0$$

$$N^2 - \frac{v_1}{a_1} N + D_1 = 0$$

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{a_1} \pm \sqrt{\left( \frac{v_1}{a_1} \right)^2 - 4D_1} \right)$$

dan berdasarkan persamaan 3.2, sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_2 = (\bar{N}, \bar{P}, 0)$  dengan

$$N^* = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{a_1} \pm \sqrt{\left( \frac{v_1}{a_1} \right)^2 - 4D_1} \right) \text{ dan } P^* = \frac{(a_0 - b_0 N)(D_0 + N^2)}{v_0}$$

dengan syarat  $a_0 - b_0 N > 0 \rightarrow a_0 > b_0 N$ .

b. Untuk  $c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} = 0$ , menjadi

$$c_3(D_3 + P) = v_3$$

$$\bar{P} = \frac{v_3}{c_3} - D_3 \quad (3.4)$$

dengan syarat  $\frac{v_3}{c_3} - D_3 > 0 \rightarrow \frac{v_3}{c_3} > D_3$ .

Berdasarkan persamaan 3.2, dapat dituliskan kembali menjadi

$$(a_0 - b_0 N)(D_0 + N^2) - v_0 P = 0$$

$$a_0 D_0 + a_0 N^2 - b_0 D_0 N - b_0 N^3 - v_0 P = 0$$

$$b_0 N^3 - a_0 N^2 + b_0 D_0 N - a_0 D_0 + v_0 P = 0$$

$$\bar{N}^3 - \frac{a_0}{b_0} \bar{N}^2 + D_0 \bar{N} - \frac{a_0 D_0}{b_0} + \frac{v_0}{b_0} \bar{P} = 0.$$

Persamaan diatas merupakan persamaan kubik yang dapat dituliskan kembali sebagai

$$f(N) = AN^3 + BN^2 + CN + E = 0$$

dimana

$$A = 1, B = -\frac{a_0}{b_0}, C = D_0, E = -\frac{a_0 D_0}{b_0} + \frac{v_0}{b_0} P$$

diketahui bahwa  $0 < \bar{N} < \frac{a_0}{b_0}$ .

Untuk  $N = 0$  maka  $f(0) = E$ , dan  $E < 0$  jika  $\frac{a_0 D_0}{v_0} > P$ . Untuk

$$N = \frac{a_0}{b_0} \text{ maka } f\left(\frac{a_0}{b_0}\right) = \frac{v_0}{b_0} \bar{P}, \text{ dan } f\left(\frac{a_0}{b_0}\right) = \frac{v_0}{b_0} \bar{P} > 0.$$

Karena  $f(0) * f\left(\frac{a_0}{b_0}\right) < 0$ , maka ada akar  $N$  positif dari  $f(\bar{N})$ , jika  $\frac{a_0 D_0}{v_0} > \bar{P}$  dipenuhi.

Kemudian berdasarkan persamaan 3.3 maka didapatkan

$$\bar{Z} = \frac{(D_2 + \bar{P})(v_1 \bar{N} - a_1(D_1 + \bar{N}^2))}{v_2(D_1 + \bar{N}^2)}$$

$\bar{Z}$  akan bernilai positif jika

$$v_1 \bar{N} - a_1(D_1 + \bar{N}^2) > 0 \rightarrow v_1 \bar{N} > a_1(D_1 + \bar{N}^2).$$

Jadi, diperoleh titik kesetimbangan  $E_3 = (\bar{N}, \bar{P}, Z^*)$ , dengan syarat

$$\frac{v_3}{c_3} > D_3, \quad \frac{a_0 D_0}{v_0} > \bar{P}, \quad v_1 \bar{N} > a_1(D_1 + \bar{N}^2).$$

Dari analisis titik setimbang dapat disimpulkan bahwa terdapat 4 titik kesetimbangan, yaitu:

1.  $E_0 = (0,0,0)$
2.  $E_1 = (\bar{N}, 0,0) = \left(\frac{a_0}{b_0}, 0,0\right)$
3.  $E_2 = (\bar{N}, \bar{P}, 0)$  dimana

$$\bar{N} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{a_1} \pm \sqrt{\left(\frac{v_1}{a_1}\right)^2 - 4D_1} \right)$$

$$\bar{P} = \frac{(a_0 - b_0 \bar{N})(D_0 + \bar{N}^2)}{v_0}$$

dengan syarat  $a_0 - b_0 \bar{N} > 0 \rightarrow a_0 > b_0 \bar{N}$ .

4.  $E_3 = (\bar{N}, \bar{P}, \bar{Z})$  dimana

$$\bar{N}^3 - \frac{a_0}{b_0} \bar{N}^2 + D_0 \bar{N} - \frac{a_0 D_0}{b_0} + \frac{v_0}{b_0} \bar{P} = 0$$



$$\bar{P} = \frac{v_3}{c_3} - D_3 \text{ dan } \bar{Z} = \frac{(D_2 + \bar{P})(v_1 \bar{N} - a_1(D_1 + \bar{N}^2))}{v_2(D_1 + \bar{N}^2)}$$

dengan syarat

$$\frac{v_3}{c_3} > D_3, \quad \frac{a_0 D_0}{v_0} > \bar{P}, \quad v_1 \bar{N} > a_1(D_1 + \bar{N}^2)$$

### 4.3 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan

Setelah didapatkan titik kesetimbangan dari model *prey-predator* maka dilakukan analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju pertumbuhan dari *prey-predator*. Untuk melakukan analisis kestabilan, diperlukan matriks Jacobian dari model. Berikut ini adalah penyederhanaan dari model *prey-predator* (3.1).

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N \left[ a_0 - b_0 N - \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \right] = N f_1(N, P, Z) \\ \frac{dP}{dt} &= P \left[ \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_2 Z}{D_2 + P} \right] = P f_2(N, P, Z) \\ \frac{dZ}{dt} &= Z^2 \left[ c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right] = Z^2 f_3(N, P, Z) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Matriks Jacobian dari model (3.5) adalah

$$J = \begin{bmatrix} N \frac{\partial f_1}{\partial N} + f_1 & N \frac{\partial f_1}{\partial P} & N \frac{\partial f_1}{\partial Z} \\ P \frac{\partial f_2}{\partial N} & P \frac{\partial f_2}{\partial P} + f_2 & P \frac{\partial f_2}{\partial Z} \\ Z^2 \frac{\partial f_3}{\partial N} & Z^2 \frac{\partial f_3}{\partial P} & Z^2 \frac{\partial f_3}{\partial Z} + 2Z f_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Dengan

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_1}{\partial N} &= \frac{\partial \left[ a_0 - b_0 N - \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \right]}{\partial N} = -b_0 + \frac{2v_0 NP}{(D_0 + N^2)^2} \\
 \frac{\partial f_1}{\partial P} &= \frac{\partial \left[ a_0 - b_0 N - \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \right]}{\partial P} = -\frac{v_0}{D_0 + N^2} \\
 \frac{\partial f_1}{\partial Z} &= \frac{\partial \left[ a_0 - b_0 N - \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \right]}{\partial Z} = 0 \\
 \frac{\partial f_2}{\partial N} &= \frac{\partial \left[ \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_2 Z}{D_2 + P} \right]}{\partial N} = \frac{v_1(D_1 - N^2)}{(D_1 + N^2)^2} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial P} &= \frac{\partial \left[ \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_2 Z}{D_2 + P} \right]}{\partial P} = \frac{v_2 Z}{(D_2 + P)^2} \\
 \frac{\partial f_2}{\partial Z} &= \frac{\partial \left[ \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_2 Z}{D_2 + P} \right]}{\partial Z} = -\frac{v_2}{D_2 + P} \\
 \frac{\partial f_3}{\partial N} &= \frac{\partial \left[ c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right]}{\partial N} = 0 \\
 \frac{\partial f_3}{\partial P} &= \frac{\partial \left[ c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right]}{\partial P} = \frac{v_3}{(D_3 + P)^2} \\
 \frac{\partial f_3}{\partial Z} &= \frac{\partial \left[ c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right]}{\partial Z} = 0
 \end{aligned}$$

Matriks Jacobian dapat ditulis kembali menjadi

$$J = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Dengan

$$b_{11} = \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) + a_0$$

$$b_{12} = -\frac{v_0 N}{D_0 + N^2}$$

$$b_{21} = \frac{v_1 (D_1 - N^2) P}{(D_1 + N^2)^2}$$

$$b_{22} = -\frac{v_2 D_2 Z}{(D_2 + P)^2} + \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1$$

$$b_{23} = -\frac{v_2 P}{D_2 + P}$$

$$b_{32} = \frac{v_3 Z^2}{(D_3 + P)^2}$$

$$b_{33} = 2Z \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right).$$

Setelah memperoleh matriks Jacobian dari sistem 3.5, maka selanjutnya akan ditunjukkan analisis kestabilan dari 4 titik kesetimbangan.

#### 4.3.1 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan $E_0 = (0,0,0)$

Matriks Jacobian pada titik  $E_0 = (0,0,0)$  adalah

$$J = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$



Sehingga menjadi

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - a_0) \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - a_0) \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - 0 + 0 = 0$$

$$(\lambda - a_0)(\lambda + a_1)(\lambda) = 0 \quad (3.8)$$

Dan diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = a_0, \lambda_2 = -a_1, \lambda_3 = 0$ . Oleh karena nilai eigen  $\lambda_1$  bernilai positif, maka titik kesetimbangan  $E_0$  bersifat tidak stabil.

#### 4.3.2 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan $E_1 = (\frac{a_0}{b_0}, 0, 0)$

Matriks Jacobian pada titik  $E_1 = (\frac{a_0}{b_0}, 0, 0)$  adalah

$$J = \begin{bmatrix} a_0 & -\frac{a_0 b_0 v_0}{b_0^2 D_0 + a_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{a_0 b_0 v_1}{b_0^2 D_1 + a_0^2} - a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

Sehingga menjadi

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_0 & \frac{a_0 b_0 v_0}{b_0^2 D_0 + a_0^2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{a_0 b_0 v_1}{b_0^2 D_1 + a_0^2} + a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda - a_0) \begin{vmatrix} \lambda - \frac{a_0 b_0 v_1}{b_0^2 D_1 + a_0^2} + a_1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - 0 + 0 = 0 \\
& (\lambda - a_0) \begin{vmatrix} \lambda - \frac{a_0 b_0 v_1}{b_0^2 D_1 + a_0^2} + a_1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} \\
& \quad + 0 \begin{vmatrix} 0 & \lambda - \frac{a_0 b_0 v_1}{b_0^2 D_1 + a_0^2} + a_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
& (\lambda - a_0) \left( \lambda - \frac{a_0 b_0 v_1}{b_0^2 D_1 + a_0^2} + a_1 \right) (\lambda) = 0 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Dan diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = a_0, \lambda_2 = \frac{a_0 b_0 v_1}{b_0^2 D_1 + a_0^2} - a_1, \lambda_3 = 0$ . Oleh karena nilai eigen  $\lambda_1$  bernilai positif, maka titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil.

#### 4.3.3 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan $E_2 = (\bar{N}, \bar{P}, 0)$

Pada titik kesetimbangan  $E_2$  berlaku  $\bar{N} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1}{a_1} \pm \sqrt{\left( \frac{v_1}{a_1} \right)^2 - 4D_1} \right)$  dan  $\bar{P} = \frac{1}{v_0} ((a_0 - b_0 \bar{N})(D_0 + \bar{N}^2))$ .

Matriks Jacobian pada titik  $E_2 = (\bar{N}, \bar{P}, 0)$  adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 & -\frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} & 0 \\ \frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} & \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 & -\frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

Sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{ccc} \lambda - \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) - a_0 & \frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} & 0 \\ -\frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} & \lambda - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 & \frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right| = 0 \\
 & \left( \lambda - \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) - a_0 \right) \left| \begin{array}{cc} \lambda - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 & \frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \\ 0 & \lambda \end{array} \right| \\
 & \quad - \left( \frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \right) \left| \begin{array}{cc} -\frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} & \frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \\ 0 & \lambda \end{array} \right| + 0 = 0 \\
 & \left( \lambda - \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) - a_0 \right) \left( \lambda - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 \right) \lambda \\
 & \quad + \left( \frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \right) \left( \frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} \right) \lambda = 0 \\
 & \lambda \left[ \left( \lambda - \left( \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 \right) \right) \left( \lambda - \left( \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 \right) \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \right) \left( \frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} \right) \right] = 0 \\
 & \left[ \lambda^2 - \left( \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 + \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 \right) \lambda \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 \right) \left( \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 \right) \right] \lambda = 0
 \end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat ditulis kembali sebagai

$$[\lambda^2 - k\lambda + l]\lambda = 0$$



dengan

$$k = \left( \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 + \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 \right)$$

$$l = \left( \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 \right) \left( \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 \right)$$

dan diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[ k + \sqrt{k^2 - 4l} \right]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[ k - \sqrt{k^2 - 4l} \right]$$

$$\lambda_3 = 0$$

Titik kesetimbangan ini akan stabil jika bagian real dari nilai eigen bernilai negatif atau  $Re(\lambda_i) < 0$ . Sehingga agar  $Re(\lambda_1)$  dan  $Re(\lambda_2)$  bernilai negatif, maka harus

$$k < 0$$

$$\frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 + \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 < 0$$

$$a_1 < -\frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) - a_0 \quad (3.10)$$

Untuk  $\lambda_2$ , ketika  $k < 0$  maka pasti  $Re(\lambda_2) < 0$ , dan untuk  $\lambda_1$  berlaku  $|k| > \sqrt{k^2 - 4l}$  dengan syarat  $l$  positif, sehingga

$$\left( \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 \right) \left( \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 \right) > 0 \quad (3.11)$$

karena  $\left( \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 \right) > 0$ , agar pertidaksamaan 3.11 terpenuhi, maka

$$\frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) + a_0 > 0$$

$$a_0 > -\left(\frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left(\frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1\right)\right)$$

Jadi, titik kesetimbangan ini stabil lokal jika

$$a_1 < -\frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left(\frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1\right) - a_0 \text{ dan}$$

$$a_0 > -\left(\frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left(\frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1\right)\right)$$

#### 4.3.4 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan $E_3 = (\bar{N}, \bar{P}, \bar{Z})$

Matriks Jacobian pada titik  $E_3 = (\bar{N}, \bar{P}, \bar{Z})$  adalah

$$J = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|\lambda I - J| = 0$$

Sehingga menjadi

$$\begin{vmatrix} \lambda - b_{11} & -b_{12} & 0 \\ -b_{21} & \lambda - b_{22} & -b_{23} \\ 0 & -b_{32} & \lambda - b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

dengan

$$b_{11} = \left(\frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0\right)$$

$$b_{12} = -\frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2}$$

$$b_{21} = \frac{v_1(D_1 - \bar{N}^2)\bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2}$$

$$b_{22} = \left(-\frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} + \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - a_1\right)$$

$$b_{23} = -\frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}}$$

$$b_{32} = \frac{v_3 \bar{Z}^2}{(D_3 + P)^2}$$

$$b_{33} = 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right)$$

Sehingga menjadi

$$(\lambda - b_{11}) \begin{vmatrix} \lambda - b_{22} & -b_{23} \\ -b_{32} & \lambda - b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} -b_{21} & -b_{23} \\ 0 & \lambda - b_{33} \end{vmatrix} + 0 = 0$$

$$(\lambda - b_{11})[(\lambda - b_{22})(\lambda - b_{33}) - b_{32}b_{23}] - b_{12}b_{21}(\lambda - b_{33}) = 0$$

$$(\lambda - b_{11})(\lambda^2 - (b_{33} + b_{22})\lambda + b_{33}b_{22} - b_{32}b_{23}) - b_{12}b_{21}\lambda + b_{12}b_{21}b_{33} = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (b_{11} - b_{33} - b_{22})\lambda^2 \\ + (b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{33}b_{22} - b_{32}b_{23})\lambda \\ + (b_{11}b_{32}b_{23} - b_{11}b_{33}b_{22} - b_{12}b_{21}b_{33}) = 0 \end{aligned}$$

Persamaan diatas bisa ditulis dengan

$$d_0\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3 = 0$$

Dengan

$$d_0 = 1$$

$$d_1 = (b_{11} - b_{33} - b_{22})$$

$$d_2 = (b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{33}b_{22} - b_{32}b_{23})$$

$$d_3 = (b_{11}b_{32}b_{23} - b_{11}b_{33}b_{22} - b_{12}b_{21}b_{33})$$

Berdasarkan kestabilan Routh-Hurwitz, persamaan diatas dapat dibentuk dalam tabel berikut:



**Tabel 4.1** Routh- Hurwitz Titik Kestimbangan  $E_3$ 

$\lambda^3$	$d_0 = 1$	$d_2$
$\lambda^2$	$d_1$	$d_3$
$\lambda$	$b_1 = \frac{d_1 d_2 - d_3}{d_1}$	0
$\lambda^0$	$d_3$	0

Titik kesetimbangan  $E_3$  dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari suatu matriks mempunyai nilai eigen dengan bagian real negatif jika dan hanya jika  $d_1 > 0, b_1 > 0$ , dan  $d_3 > 0$ . Dengan rumus Routh Hurwitz dapat dituliskan dalam tabel berikut ini :

Nilai  $d_1, d_2, d_3$  dapat dianalisis sebagai berikut :

Untuk  $d_1$

$$d_1 = (b_{11} - b_{33} - b_{22})$$

$$d_1 = \left( \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) - 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) - \left( -\frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} + \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - a_1 \right) \right) \left( \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) - 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) - \left( -\frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} + \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - a_1 \right) \right) > 0$$

Nilai  $d_1$  akan positif jika

$$\frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 - 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) + \frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 > 0$$

$$a_0 > -\frac{v_0\bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + 2\bar{Z}\left(c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}}\right) - \frac{v_2D_2\bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} + \frac{v_1\bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - a_1 \quad (3.12)$$

Untuk  $d_3$

$$d_3 = (b_{11}b_{32}b_{23} - b_{11}b_{33}b_{22} - b_{12}b_{21}b_{33})$$

$$d_3 = \left( \left( \frac{v_0\bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) \left( \frac{v_3\bar{Z}^2}{(D_3 + \bar{P})^2} \right) \left( -\frac{v_2\bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \right) + \left( \frac{v_0\bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \left( -\frac{v_2D_2\bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} + \frac{v_1\bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - a_1 \right) + \frac{v_0\bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{v_1(D_1 - \bar{N}^2)\bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right)$$

nilai  $d_3$  akan positif jika

$$\left( \left( \frac{v_0\bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) \left( \frac{v_3\bar{Z}^2}{(D_3 + \bar{P})^2} \right) \left( -\frac{v_2\bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \right) + \left( \frac{v_0\bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \left( -\frac{v_2D_2\bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} + \frac{v_1\bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - a_1 \right) + \frac{v_0\bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{v_1(D_1 - \bar{N}^2)\bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) > 0$$

sehingga berlaku

$$\begin{aligned} & \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \left( -\frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} + \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - a_1 \right) \\ & > - \left( \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) \left( \frac{v_3 \bar{Z}^2}{(D_3 + \bar{P})^2} \right) \left( -\frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \right) \quad (3.13) \end{aligned}$$

Untuk  $b_1$

$$b_1 = \frac{d_1 d_2 - d_3}{d_1}$$

$b_1$  bertanda positif jika  $d_1 d_2 - d_3 > 0 \rightarrow d_1 d_2 > d_3$  karena telah diketahui bahwa  $d_1 > 0$  dan  $d_3 > 0$ , maka harus  $d_2 > 0$ , sehingga

Untuk  $d_2$

$$d_2 = (b_{11}b_{33} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{33}b_{22} - b_{32}b_{23})$$

$$\begin{aligned} d_2 = & \left( \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \right. \\ & - \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) \left( \frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} \right. \\ & \left. \left. + a_1 \right) + \frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} \right) \right. \\ & - 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \left( \frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 \right) \\ & \left. \left. + \frac{v_3 \bar{Z}^2}{(D_3 + \bar{P})^2} \left( -\frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \right) \right) > 0 \end{aligned}$$



nilai  $d_2$  akan positif jika

$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \right. \\
 & - \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) \left( \frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} \right. \\
 & \left. \left. + a_1 \right) + \frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} \right) \right. \\
 & - 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \left( \frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} \right. \\
 & \left. \left. + a_1 \right) + \frac{v_3 \bar{Z}^2}{(D_3 + \bar{P})^2} \left( -\frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \right) \right) > 0
 \end{aligned}$$

sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \right. \\
 & - \left( \frac{v_0 \bar{P}(\bar{N}^2 - D_0)}{(D_0 + \bar{N}^2)^2} + a_0 \right) \left( \frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} \right. \\
 & \left. \left. + a_1 \right) \right) \\
 & > - \frac{v_0 \bar{N}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{v_1 (D_1 - \bar{N}^2) \bar{P}}{(D_1 + \bar{N}^2)^2} \right) \\
 & + 2\bar{Z} \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + \bar{P}} \right) \left( \frac{v_2 D_2 \bar{Z}}{(D_2 + \bar{P})^2} - \frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} + a_1 \right) \\
 & - \frac{v_3 \bar{Z}^2}{(D_3 + \bar{P})^2} \left( -\frac{v_2 \bar{P}}{D_2 + \bar{P}} \right) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Setelah diketahui bahwa  $d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0$ , maka berlaku untuk  $b_1 > 0$  akan terpenuhi jika  $d_1 d_2 > d_3$

$$\begin{aligned}
 & \left( \left( \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) + a_0 \right) - 2Z \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{v_2 D_2 Z}{(D_2 + P)^2} + \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 \right) \right) \left( \left( \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + a_0 \right) 2Z \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) + a_0 \right) \left( \frac{v_2 D_2 Z}{(D_2 + P)^2} + \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - a_1 \right) + \frac{v_0 N}{D_0 + N^2} \left( \frac{v_1 (D_1 - N^2) P}{(D_1 + N^2)^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - 2Z \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right) \left( \frac{v_2 D_2 Z}{(D_2 + P)^2} + \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{v_3 Z^2}{(D_3 + P)^2} \left( \frac{v_2 P}{D_2 + P} \right) \right) \\
 & > \left( - \left( \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) + a_0 \right) \left( \frac{v_3 Z^2}{(D_3 + P)^2} \right) \left( \frac{v_2 P}{D_2 + P} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) + a_0 \right) 2Z \left( c_3 \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{v_3}{D_3 + P} \right) \left( \frac{v_2 D_2 Z}{(D_2 + P)^2} + \frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{v_0 N}{D_0 + N^2} \left( \frac{v_1 (D_1 - N^2) P}{(D_1 + N^2)^2} \right) 2Z \left( c_3 - \frac{v_3}{D_3 + P} \right) \right) \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Dari tabel Routh-Hurwitz dapat dilihat bahwa variabel-variabel pada kolom pertama memiliki nilai yang sama yaitu bertanda positif. Titik kesetimbangan ini akan stabil asimtotik jika kondisi (3.12)-(3.15) terpenuhi.

#### 4.4 Analisis Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan kualitatif yang disebabkan oleh perubahan parameter. Sistem dinamik secara umum dapat di tulis kembali menjadi

$$\dot{v} = F(v, \mu)$$

Dimana

$$v = v(N, P, Z), \quad \mu = \mu(a_0, a_1, b_0, v_1, v_2, v_3, c_3, D_0, D_1, D_2, D_3)$$

Bifurkasi Hopf terjadi jika sebuah titik bifurkasi  $(v_0, \mu_0)$  pada titik kesetimbangan memiliki 2 nilai eigen konjugat murni, atau dapat dituliskan bahwa  $\lambda_i = \pm i\sqrt{w}$ , dimana  $i = 1, 2$  dan  $\lambda_3 \neq 0$ .

Pada titik kesetimbangan  $E_2 = (N, P, 0)$  memiliki 2 nilai eigen imajiner, yaitu  $\lambda_1 = \frac{1}{2}[k + \sqrt{k^2 - 4l}]$  dan  $\lambda_2 = \frac{1}{2}[k - \sqrt{k^2 - 4l}]$  dengan syarat  $\sqrt{k^2 - 4l} < 0 \rightarrow k^2 < 4l$ . Nilai  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  akan bernilai imajiner murni jika

$$k = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{v_1 N}{D_1 + N^2} + a_1 + \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) + a_0 = 0$$

$$a_0 = -\frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right)$$

karena  $a_0$  positif, maka persamaan diatas terpenuhi jika

$$-\frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - a_1 - \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) > 0$$

$$-\frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) > a_1 \quad (3.16)$$

pada pertidaksamaan diatas, diketahui bahwa ruas kanan bernilai positif. Agar kondisi 10 terpenuhi maka harus

$$-\frac{v_1 N}{D_1 + N^2} - \frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) > 0$$



$$\frac{v_1 N}{D_1 + N^2} < -\frac{v_0 P}{D_0 + N^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 \right) \quad (3.18)$$

dan kondisi diatas tepenuhi jika

$$\frac{2N^2}{D_0 + N^2} - 1 < 0 \rightarrow N^2 - D_0 < 0 \rightarrow N^2 < D_0$$

Namun dari analisis bifurkasi diatas, diperoleh nilai  $a_0$  yang lebih kecil dari batas kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_2$ , dan nilai eigen  $\lambda_3 = 0$ , sehingga tidak ada titik bifurkasi di sekitar titik kesetimbangan  $E_2$ .

#### 4.5 Simulasi Numerik

Setelah didapatkan titik kesetimbangan sistem dan kestabilan, selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk memudahkan dalam menganalisis sistem. Simulasi numerik menggunakan algoritma Runge-Kutta orde 6. Simulasi akan dilakukan menggunakan *software* Matlab.

Dalam simulasi ini ditentukan terlebih dahulu nilai awal dan parameter yang dapat dilihat pada tabel 4.2. Kemudian syarat yang diperoleh berdasarkan hasil analisis pada sub bab sebelumnya dievaluasi dengan parameter yang ada, dan untuk selanjutnya nilai-nilai parameter yang didapatkan di masukkan ke dalam algoritma Runge-Kutta orde 6.

**Tabel 4.2.** Parameter dan nilai[3]

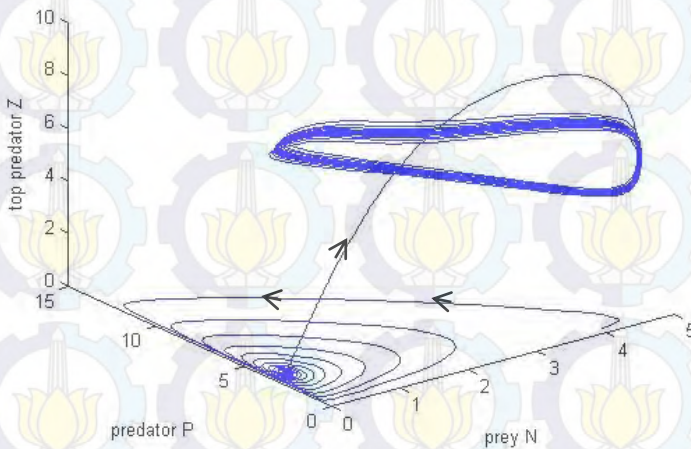
Parameter	Nilai
$a_0$	0.35
$b_0$	0.075
$v_0$	1
$D_0$	10
$v_1$	2
$a_1$	0.035
$D_1$	10











**Gambar 4.4.** Potret fase pada titik kesetimbangan  $E_1$

Pada gambar diatas dengan nilai awal mendekati titik kesetimbangan  $E_1$  menunjukkan hal yang sama dengan gambar 4.5, walaupun pada awalnya titik bergerak secara teratur namun pada akhirnya titik bergerak tidak beraturan. Hal ini menunjukkan bahwa sistem juga tidak stabil pada titik kesetimbangan  $E_1$ .

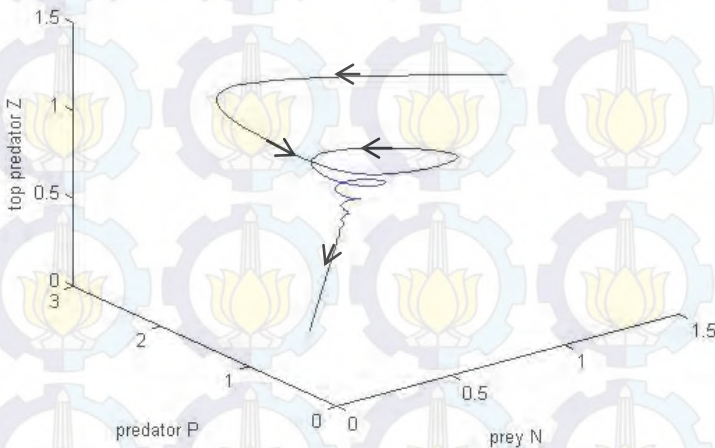
Simulasi keempat yang dilakukan dengan mensimulasikan sistem predator-prey pada model (1) sesuai dengan nilai awal dan parameter pada simulasi pertama, namun dengan menentukan nilai  $c_3 = 0.05$  maka akan didapat hasil sebagai berikut.







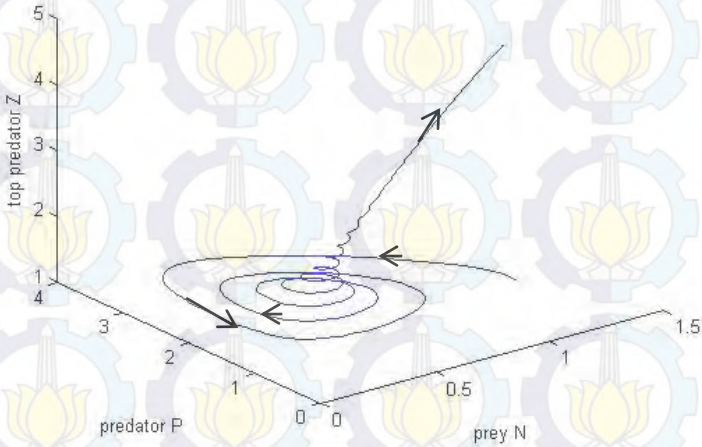
maka diperoleh  $a_0 > 0.07849$ . Dengan menentukan nilai  $a_0 = 0.1$  maka akan didapat hasil sebagai berikut.



**Gambar 4.7.** Potret fase dengan  $a_0 = 0.1$

Pada gambar 4.7 dengan menurunkan nilai rata-rata pertumbuhan prey  $a_0$  menjadi 0.1 menunjukkan bahwa sistem (1) berubah dari tidak stabil menjadi stabil pada titik  $(0.2073, 0.8484, 0.1682)$ . Namun untuk hasil analisis kestabilan pada titik kesetimbangan  $E_2 = (N, P, 0)$ , dengan  $a_0 = 0.1$  diperoleh titik stabil menuju  $(0.175, 0.1144, 0)$ .

Simulasi ketujuh yang dilakukan dengan mensimulasikan sistem predator-prey pada model (1) sesuai dengan nilai awal dan parameter pada simulasi pertama, namun dengan menaikkan nilai  $a_0$  dari simulasi sebelumnya, yaitu  $a_0 = 0.2$ , sehingga diperoleh hasil simulasi sebagai berikut:



**Gambar 4.8.** Potret fase dengan  $a_0 = 0.2$

Pada gambar 4.7 dengan menaikkan nilai rata-rata pertumbuhan prey  $a_0$  dari simulasi sebelumnya menjadi 0.2 menunjukkan bahwa sistem (1) tetap stabil pada titik (1.1693, 1.2766, 4.7536).



## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini disimpulkan hasil analisis dari model predator prey Leslie-Gower dan juga hasil simulasi numerik dengan metode numerik Runge-Kutta orde 6. Selain itu juga diberikan saran atau rekomendasi sebagai bahan pertimbangan untuk pengembangan pada penelitian selanjutnya.

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis model predator-prey Leslie-Gower beserta simulasinya, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model predator-prey 3 spesies yang terdiri dari prey, predator dan toppredator ini memiliki 4 titik kesetimbangan, yaitu  $E_0 = (0,0,0)$ ,  $E_1 = (N,0,0)$ ,  $E_2 = (N, P, 0)$ , dan  $E_3 = (N, P, Z)$ .
2. Dari 4 titik kesetimbangan yang memenuhi,  $E_0$  dan  $E_1$  bersifat tidak stabil,  $E_2$  bersifat stabil jika  $a_1 < -\frac{v_1 \bar{N}}{D_1 + \bar{N}^2} - \frac{v_0 \bar{P}}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2\bar{N}^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) - a_0$  dan  $a_0 > -\left( \frac{v_0 P}{D_0 + \bar{N}^2} \left( \frac{2N^2}{D_0 + \bar{N}^2} - 1 \right) \right)$ , sedangkan  $E_3$  bersifat stabil asimtotik jika kondisi (3.13)-(3.16) terpenuhi.
3. Pada titik kesetimbangan  $E_2$  tidak terjadi bifurkasi Hopf.
4. Dari simulasi numerik menunjukkan perubahan kecil pada parameter pertumbuhan prey  $a_0$  dan pertumbuhan toppredator  $c_3$  dapat merubah kestabilan sistem.

#### 5.2 Saran

Dalam Tugas Akhir ini belum dibahas secara mendalam mengenai terjadinya bifurkasi pada sistem predator prey Leslie-Gower sehingga peneliti mengusulkan untuk mengkaji hal tersebut.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Suwanto. N. (2013). "*Analisis Dinamik Model Predator-Prey Tiga Spesies*". Jurnal Mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya. Vol.1. No. 1. Hal 9-12.
- [2] Resmi, F. (2014). "*Kendali Optimal pada Sistem Prey-Predator dengan Pemberian Makan Alternatif pada Predator*". Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [3] Ali. S.J, Arifin. N.Md, Naid. R.K, Ismail. F, dan Bachok. N. (2014). "*A three species of Leslie-Gower predator-prey food chain model with Sokol-Howell functional response*". *Institute for Mathematical Research, university Putra Malaysia*. Malaysia.
- [4] Zhang. Lie, Wang. Weiming, Xue. Yakui, dan Jin. Zhen. (2008). "*Complex dynamics of a Holling-type IV predator-prey model*". *Institute of Nonlinear Analysis, School of Mathematics and Information Science, Wenzhou University, Wenzhou, Zhejiang, 325035, Department of Mathematics, North University of China*. China.
- [5] Rahmalia. D. (2010). "*Permodelan Matematika dan Analisis Stabilitas dari Penyebaran Penyakit Flu Burung*". Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [6] Zainal, F.D. (2014). "*Analisis Kestabilan pada Model Transmisi Virus Hepatitis B yang Dipengaruhi oleh Migrasi*". Tugas Akhir Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [7] Roat. Mas. (2012). "*Bifurkasi Hopf pada Sistem Predator-prey dengan Fungsi Respon Tipe II*". Skripsi. Universitas Negeri Yogyakarta. Yogyakarta.
- [8] Sunaryo. M.S.W, Salleh. Z, Mamat. M. (2013). "*Mathematical Model of Three Species Food Chain with*



*Holling Type-III Functional Response”. International Journal of Pyre and Applied Mathematics. Malaysia.*

- [9] Gerald. C.F dan Wheatley. P.O. (2004). “*Applied Numerical Analysis*”. *California Polytechnic State University, United State of America.*

## LAMPIRAN

### Listing algoritma Runge-Kutta orde 6

```
clear all
clc
a0=0.1;
c3=0.047;
a1=0.035;
b0=0.075;
v0=1;
v1=2;
v2=0.405;
v3=1;
D0=10;
D1=10;
D2=10;
D3=20;
N(1)=1.2;
P(1)=1.2;
Z(1)=1.2;
h=1;
n=5000;
for i=1:n
    k1_N(i)=h*(N(i)*(a0-b0*N(i)-
v0*P(i)/(D0+N(i)^2)));
    k1_P(i)=h*(P(i)*(v1*N(i)/(D1+(N(i))^2)-a1-
v2*Z(i)/(D2+P(i))));
    k1_Z(i)=h*((Z(i)^2)*(c3-v3/(D3+P(i))));

    k2_N(i)=h*((N(i)+k1_N(i)/4)*(a0-
b0*(N(i)+k1_N(i)/4)-
v0*(P(i)+k1_P(i)/4)/(D0+(N(i)+k1_N(i)/4)^2)));
    k2_P(i)=h*((P(i)+k1_P(i)/4)*(v1*(N(i)+k1_N(i)/4)/
(D1+(N(i)+k1_N(i)/4)^2)-a1-
v2*(Z(i)+k1_Z(i)/4)/(D2+(P(i)+k1_P(i)/4))));
    k2_Z(i)=h*((Z(i)+k1_Z(i)/4)^2)*(c3-
v3/(D3+(P(i)+k1_P(i)/4)));
```

$$k3\_N(i) = h * ((N(i) + 3 * k1\_N(i) / 32 + 9 * k2\_N(i) / 32) * (a0 - b0 * (N(i) + 3 * k1\_N(i) / 32 + 9 * k2\_N(i) / 32) - v0 * (P(i) + 3 * k1\_P(i) / 32 + 9 * k2\_P(i) / 32) / (D0 + (N(i) + 3 * k1\_N(i) / 32 + 9 * k2\_N(i) / 32)^2))) ;$$

$$k3\_P(i) = h * ((P(i) + 3 * k1\_P(i) / 32 + 9 * k2\_P(i) / 32) * (v1 * (N(i) + 3 * k1\_N(i) / 32 + 9 * k2\_N(i) / 32) / (D1 + (N(i) + 3 * k1\_N(i) / 32 + 9 * k2\_N(i) / 32)^2) - a1 - v2 * (Z(i) + 3 * k1\_Z(i) / 32 + 9 * k2\_Z(i) / 32) / (D2 + (P(i) + 3 * k1\_P(i) / 32 + 9 * k2\_P(i) / 32)))) ;$$

$$k3\_Z(i) = h * ((Z(i) + 3 * k1\_Z(i) / 32 + 9 * k2\_Z(i) / 32) ^ 2) * (c3 - v3 / (D3 + (P(i) + 3 * k1\_P(i) / 32 + 9 * k2\_P(i) / 32))) ;$$

$$k4\_N(i) = h * ((N(i) + 1932 * k1\_N(i) / 2197 - 7200 * k2\_N(i) / 2197 + 7296 * k3\_N(i) / 2197) * (a0 - b0 * (N(i) + 1932 * k1\_N(i) / 2197 - 7200 * k2\_N(i) / 2197 + 7296 * k3\_N(i) / 2197) - v0 * (P(i) + 1932 * k1\_P(i) / 2197 - 7200 * k2\_P(i) / 2197 + 7296 * k3\_P(i) / 2197) / (D0 + (N(i) + 1932 * k1\_N(i) / 2197 - 7200 * k2\_N(i) / 2197 + 7296 * k3\_N(i) / 2197)^2))) ;$$

$$k4\_P(i) = h * ((P(i) + 1932 * k1\_P(i) / 2197 - 7200 * k2\_P(i) / 2197 + 7296 * k3\_P(i) / 2197) * (v1 * (N(i) + 1932 * k1\_N(i) / 2197 - 7200 * k2\_N(i) / 2197 + 7296 * k3\_N(i) / 2197) / (D1 + (N(i) + 1932 * k1\_N(i) / 2197 - 7200 * k2\_N(i) / 2197 + 7296 * k3\_N(i) / 2197)^2) - a1 - v2 * (Z(i) + 1932 * k1\_Z(i) / 2197 - 7200 * k2\_Z(i) / 2197 + 7296 * k3\_Z(i) / 2197) / (D2 + (P(i) + 1932 * k1\_P(i) / 2197 - 7200 * k2\_P(i) / 2197 + 7296 * k3\_P(i) / 2197)))) ;$$

$$k4\_Z(i) = h * ((Z(i) + 1932 * k1\_Z(i) / 2197 - 7200 * k2\_Z(i) / 2197 + 7296 * k3\_Z(i) / 2197) ^ 2) * (c3 - v3 / (D3 + (P(i) + 1932 * k1\_P(i) / 2197 - 7200 * k2\_P(i) / 2197 + 7296 * k3\_P(i) / 2197))) ;$$

$$k5\_N(i) = h * ((N(i) + 439 * k1\_N(i) / 216 - 8 * k2\_N(i) + 3680 * k3\_N(i) / 513 - 845 * k4\_N(i) / 4104) * (a0 - b0 * (N(i) + 439 * k1\_N(i) / 216 -$$



$$\begin{aligned}
& 8*k2\_N(i)+3680*k3\_N(i)/513-845*k4\_N(i)/4104)- \\
& v0*(P(i)+439*k1\_P(i)/216- \\
& 8*k2\_P(i)+3680*k3\_P(i)/513- \\
& 845*k4\_P(i)/4104)/(D0+(N(i)+439*k1\_N(i)/216- \\
& 8*k2\_N(i)+3680*k3\_N(i)/513- \\
& 845*k4\_N(i)/4104)^2)); \\
& k5\_P(i)=h*((P(i)+439*k1\_P(i)/216- \\
& 8*k2\_P(i)+3680*k3\_P(i)/513- \\
& 845*k4\_P(i)/4104)*(v1*(N(i)+439*k1\_N(i)/216- \\
& 8*k2\_N(i)+3680*k3\_N(i)/513- \\
& 845*k4\_N(i)/4104)/(D1+(N(i)+439*k1\_N(i)/216- \\
& 8*k2\_N(i)+3680*k3\_N(i)/513-845*k4\_N(i)/4104)^2)- \\
& a1-v2*(Z(i)+439*k1\_Z(i)/216- \\
& 8*k2\_Z(i)+3680*k3\_Z(i)/513- \\
& 845*k4\_Z(i)/4104)/(D2+(P(i)+439*k1\_P(i)/216- \\
& 8*k2\_P(i)+3680*k3\_P(i)/513-845*k4\_P(i)/4104))); \\
& k5\_Z(i)=h*((Z(i)+439*k1\_Z(i)/216- \\
& 8*k2\_Z(i)+3680*k3\_Z(i)/513- \\
& 845*k4\_Z(i)/4104)^2)*(c3- \\
& v3/(D3+(P(i)+439*k1\_P(i)/216- \\
& 8*k2\_P(i)+3680*k3\_P(i)/513-845*k4\_P(i)/4104))); \\
& \\
& k6\_N(i)=h*((N(i)-8*k1\_N(i)/27+2*k2\_N(i)- \\
& 3544*k3\_N(i)/2565+1856*k4\_N(i)/4104- \\
& 11*k5\_N(i)/40)*(a0-b0*(N(i)- \\
& 8*k1\_N(i)/27+2*k2\_N(i)- \\
& 3544*k3\_N(i)/2565+1856*k4\_N(i)/4104- \\
& 11*k5\_N(i)/40)-v0*(P(i)-8*k1\_P(i)/27+2*k2\_P(i)- \\
& 3544*k3\_P(i)/2565+1856*k4\_P(i)/4104- \\
& 11*k5\_P(i)/40)/(D0+(N(i)-8*k1\_N(i)/27+2*k2\_N(i)- \\
& 3544*k3\_N(i)/2565+1856*k4\_N(i)/4104- \\
& 11*k5\_N(i)/40)^2))); \\
& k6\_P(i)=h*((P(i)-8*k1\_P(i)/27+2*k2\_P(i)- \\
& 3544*k3\_P(i)/2565+1856*k4\_P(i)/4104- \\
& 11*k5\_P(i)/40)*(v1*(N(i)-8*k1\_N(i)/27+2*k2\_N(i)- \\
& 3544*k3\_N(i)/2565+1856*k4\_N(i)/4104- \\
& 11*k5\_N(i)/40)/(D1+(N(i)-8*k1\_N(i)/27+2*k2\_N(i)- \\
& 3544*k3\_N(i)/2565+1856*k4\_N(i)/4104- \\
& 11*k5\_N(i)/40)^2)-a1-v2*(Z(i)-
\end{aligned}$$

```

8*k1_Z(i)/27+2*k2_Z(i)-
3544*k3_Z(i)/2565+1856*k4_Z(i)/4104-
11*k5_Z(i)/40)/(D2+(P(i)-8*k1_P(i)/27+2*k2_P(i)-
3544*k3_P(i)/2565+1856*k4_P(i)/4104-
11*k5_P(i)/40)))));
k6_Z(i)=h*((Z(i)-8*k1_Z(i)/27+2*k2_Z(i)-
3544*k3_Z(i)/2565+1856*k4_Z(i)/4104-
11*k5_Z(i)/40)^2)*(c3-sqrt(3)/(D3+(P(i)-
8*k1_P(i)/27+2*k2_P(i)-
3544*k3_P(i)/2565+1856*k4_P(i)/4104-
11*k5_P(i)/40)))));
N(i+1)=N(i)+(16*k1_N(i)/135+6656*k3_N(i)/12825+2
8561*k4_N(i)/56430-9*k5_N(i)/50+2*k6_N(i)/55);
P(i+1)=P(i)+(16*k1_P(i)/135+6656*k3_P(i)/12825+2
8561*k4_P(i)/56430-9*k5_P(i)/50+2*k6_P(i)/55);
Z(i+1)=Z(i)+(16*k1_Z(i)/135+6656*k3_Z(i)/12825+2
8561*k4_Z(i)/56430-9*k5_Z(i)/50+2*k6_Z(i)/55);
end
N
P
Z
t =0:h:n;
figure(1)
plot3(N,P,Z);
xlabel('prey N');
ylabel('predator P');
zlabel('top predator Z');
figure(2)
plot(t,N,t,P,'r',t,Z,'g');
xlabel('waktu t')
legend('Prey N','predator P','top predator Z');

```

## BIODATA PENULIS



Penulis dilahirkan di Surabaya pada tanggal 18 Maret 1992, merupakan anak ketiga dari empat bersaudara. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu SD Ma'arif Ketegan Taman, SMP YPM 1 Taman, dan SMA Wachid Hasyim 2 Taman.

Kemudian penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika melalui jalur SNMPTN pada tahun 2010 dan terdaftar dengan NRP 1210 100 060. Di Jurusan Matematika ini, penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Penulis juga aktif di beberapa organisasi intra kampus diantaranya: Himpunan Mahasiswa Matematika sebagai *staff* Departemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa pada periode 2011-2012 dan menjabat sebagai kepala Departemen Dalam Negeri pada periode 2012-2013 serta LDJ Ibnu Muqlah sebagai kepala Departemen Hubungan Kelembagaan pada periode 2012-2013.

Untuk kritik, saran, dan pertanyaan mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui *e-mail* ke [romdoni10@gmail.com](mailto:romdoni10@gmail.com).